توزیع نرمال

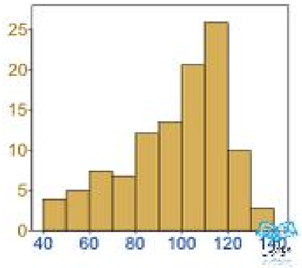
مدرس: دکتر سمیه عباسی

عضو هیات علمی دانشگاه آزاد اسلامی اصفهان (خوراسگان)

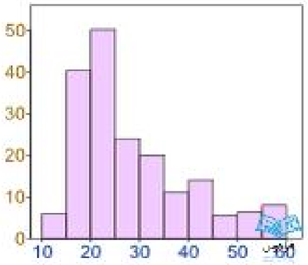

بسم الله الرحمن الرحیم

داده ها می توانند به طریقه های مختلفی "توزیع" (Distribute) داده شوند.

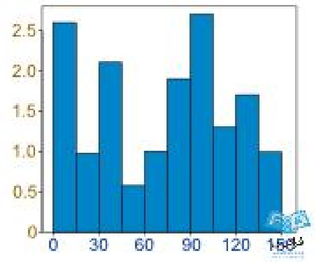
داده ها می توانند بیشتر در چپ توزیع شوند.



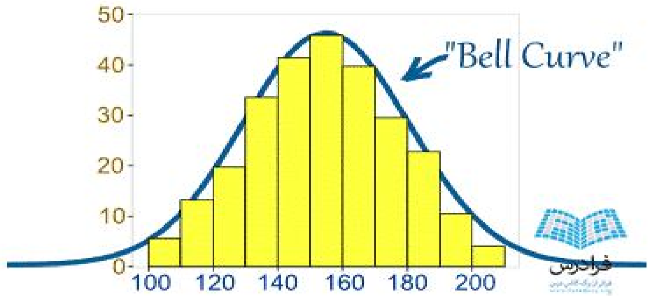
یا می توانند بیشتر در راست توزیع شوند.



یا می توانند کلا در هم آمیخته باشند.



اما موارد بسیاری وجود دارد که داده ها میل به جمع شدن در اطراف مقدار وسطی دارند بدون این که به چپ یا راست تمایل داشته باشند، و به "توزیع نرمال" نزدیک می شوند. مثل حالت زیر:



یک توزیع نرمال

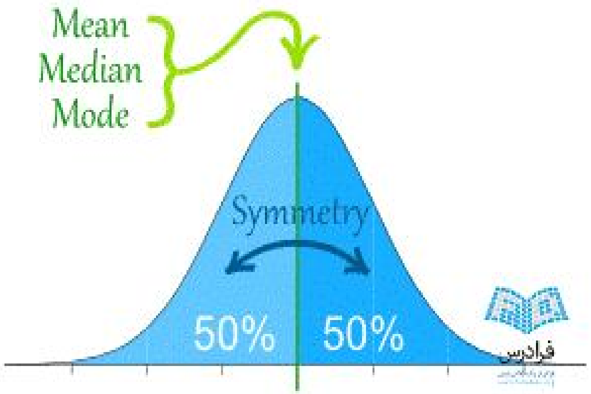
بیشتر با نام "نمودار زنگوله ای" یاد می شود، چرا که منحنی آن شبیه یک زنگوله است.

موارد بسیاری از توزیع نرمال تبعیت می کنند:

- قد مردم
- اندازه اجسام شکل یافته توسط ماشین ها
- خطاهای اندازه گیری
- فشار خون
- نمرات یک امتحان

ما می گوییم که داده ها "به صورت نرمال توزیع شده اند":

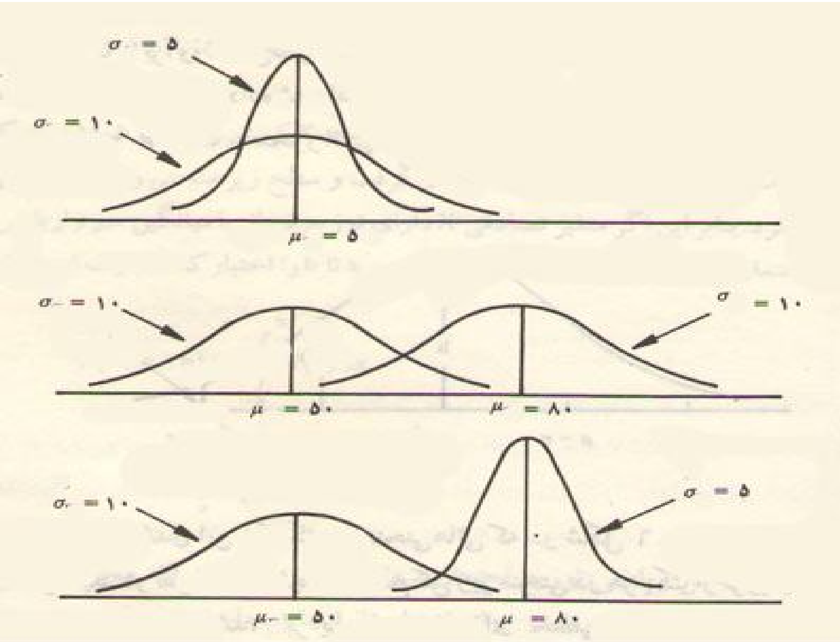
نمودار نرمال



توزیع نرمال دارای موارد زیر است:

- میانگین = میانه = مد
- تقارن در وسط
- ۵۰٪ مقادیر کوچکتر از میانگین و ۵۰٪ مقادیر بزرگتر از میانگین است.

شکل توزیع نرمال توسط دو پارامتر میانگین μ و انحراف معیار σ مشخص می شود که با تغیر این دو پارامتر شکل توزیع نیز تغیر می کند.



معمولا وقتی متغیر تصادفی **X** دارای توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ است آنرا به صورت زیر نمایش می دهیم.

$$X \sim N(\mu , \sigma^۲)$$

علامت $\sim$ به مفهوم دارای توزیع و **N** نیز به معنی نرمال است.

تابع چگالی توزیع نرمال به‌صورت زیر است:

$$f_X(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\sigma} e^{-\frac{۱}{۲\sigma^۲}(x-\mu)^۲} \quad , \ x \in \mathbb{R}, \ \mu \in \mathbb{R}, \ \sigma > ۰$$

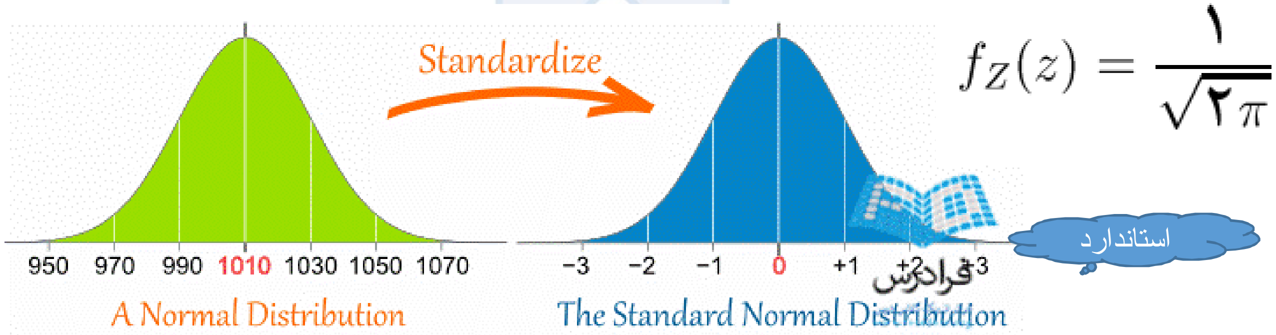
توزیع نرمال استاندارد

می توان مقادیر مربوط به متغیرهای تصادفی X را که دارای توزیع نرمال است توسط رابطه ی زیر استاندارد کرد.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

بنابراین متغیر استاندارد شده Z، همیشه دارای میانگین $\mu_Z = ۰$ و انحراف معیار $\sigma_Z = ۱$ است.

$$f_Z(z) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{z^۲}{۲}} \quad , \quad z \in \mathbb{R}$$



با توجه به اهمیت توزیع نرمال اغلب به محاسبه احتمال‌های مربوط به این توزیع نیاز داریم، یعنی ضرورت دارد احتمال‌هایی به‌صورت $P(a < X < b)$ وقتی $X \sim N(\mu, \sigma^۲)$ است را محاسبه کنیم. یعنی،

$$P(a < X < b) = \int_a^b \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\sigma} e^{-\frac{۱}{۲\sigma^۲}(x-\mu)^۲} dx$$

اما محاسبه انتگرال فوق امکان‌پذیر نیست . به‌همین جهت مقادیر تقریبی تابع توزیع تجمعی استاندارد نرمال را که با نماد $\phi(x)$ نشان می‌دهیم براساس جدول توزیع احتمال نرمال استاندارد که در پیوست کتاب (جدول ۳) موجود است به‌دست می‌آوریم. سپس احتمال‌های مربوط به توزیع‌های نرمال دیگر را با تبدیل آنها به توزیع نرمال استاندارد محاسبه خواهیم کرد.

$$P(a < X < b) = \phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

نکته۱

در محاسبه هر احتمالی در توزیع نرمال:
۱) گزاره احتمالی هم ارز را بنویسید
۲) منحنی نرمال را رسم کنید
۳) سطح مورد نظر را هاشور بزنید
۴) از جدول نرمال استاندارد استفاده کنید.

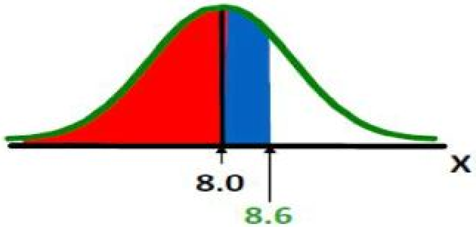
نکته۲

1) $P(Z>a)=P(Z<-a)$
2) $P(Z>a)=1-P(Z<a)$
3) $P(a<Z<b)=P(Z<b)-P(Z<a)$

مثال ۱

فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین ۸ و واریانس ۲۵ است. مطلوبست تعیین مقدار

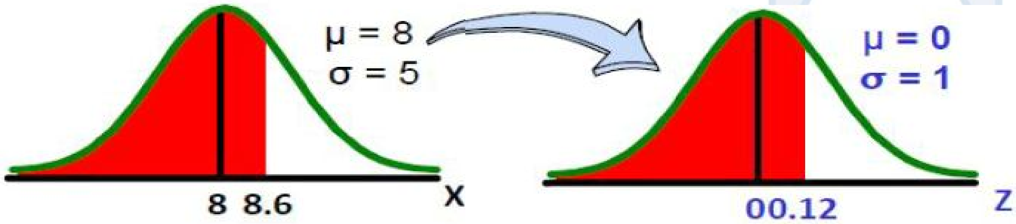
- $P(X < 8.6)$



حل

ابتدا مقدار استاندارد شده متغیر نرمال را محاسبه می کنیم

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{8.6 - 8.0}{5.0} = 0.12$$

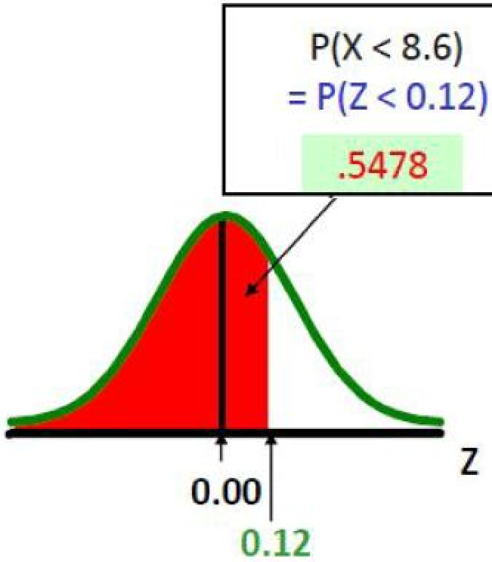


$P(X < 8.6)$ $P(Z < 0.12)$

بنابراین مسئله به تعیین مقدار $P(Z < 0.12)$ تبدیل خواهد شد

نمایی بریده شده از جدول نرمال استاندارد

Z	.00	.01	.02
0.0	.5000	.5040	.5080
0.1	.5398	.5438	.5478
0.2	.5793	.5832	.5871
0.3	.6179	.6217	.6255



Standard Normal Probabilities

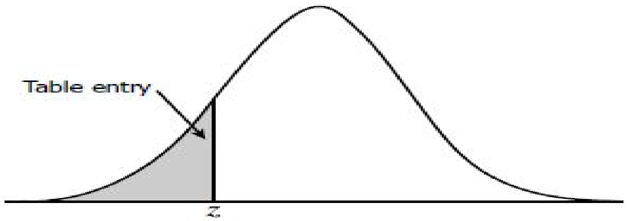


Table entry for z is the area under the standard normal curve to the left of z.

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
−3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
−3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
−3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
−3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
−2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
−2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
−2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
−2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
−2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
−2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
−2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
−2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
−2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
−2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
−1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
−1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
−1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
−1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
−1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
−1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
−1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
−1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
−1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
−1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
−0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
−0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
−0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
−0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
−0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
−0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
−0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
−0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
−0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
−0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

Standard Normal Probabilities

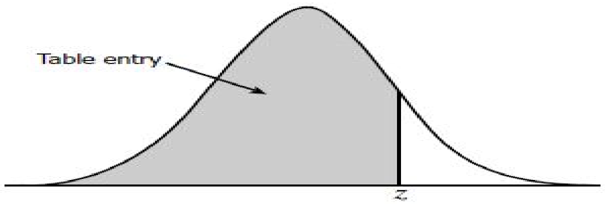


Table entry for z is the area under the standard normal curve to the left of z.

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

مثال ۲

فرض کنید که درآمدهای روزانه خانوارها در شهری دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۲۰ هزارتومان و انحراف معیار ۶۰ هزار تومان است.

الف) احتمال اینکه خانواده ای درآمدی کمتر از ۱۱۵ هزار رتومان داشته باشد چقدر است؟

ب) احتمال اینکه خانواده ای درآمدی بین ۱۴۰ تا ۲۲۵ هزار تومان داشته باشد چقدر است؟

ج) احتمال اینکه خانواده ای درآمدی بیشتر از ۱۰۸ هزار داشته باشد چقدر است؟

د) ۹۶ درصد از خانوارها درآمدشان کمتر از چه میزانی است؟

$X \sim N(120, 60^2)$

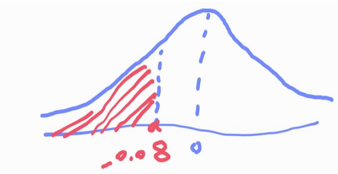
حل الف

$P(X<115)$

$=P\left(\frac{X-120}{60}<\frac{115-120}{60}\right)$

$=P(Z<-0.08)$

$=0.4681$



حل ب

$P(140<X<225)$

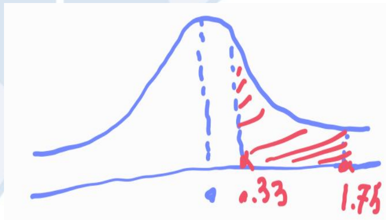
$=P\left(\frac{140-120}{60}<\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{225-120}{60}\right)$

$=P(0.33<Z<1.75)$

$=P(Z<1.75)-P(Z<0.33)$

$=0.9599-0.6293$

$=0.3306$

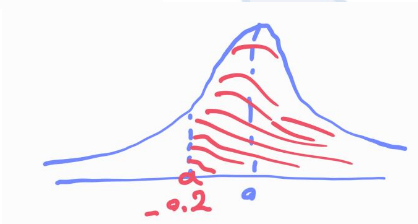


حل ج

$$P(x > 108)$$

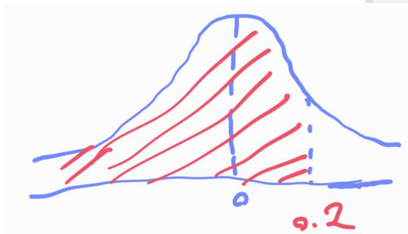
$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{108-120}{60}\right)$$

$$= P(Z > -0.2)$$



$$= P(Z < 0.2)$$

$$= 0.5793$$



روش دیگر

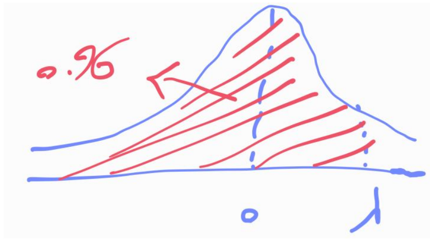
$$P(Z > -0.2)$$

$$= 1 - P(Z < -0.2)$$

$$= 1 - 0.4207$$

$$= 0.5793$$

حل د



$P(X < ?) = 0.96$

$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{\lambda-120}{60}\right) = 0.96$

$P\left(Z < \frac{\lambda-120}{60}\right) = 0.96$

از طرفی

$Z_{0.96} = 1.75$

استفاده معکوس از جدول نرمال

$\frac{\lambda-120}{60} = 1.75$

$\lambda - 120 = 60 \times 1.75$

$\lambda - 120 = 105$

$\lambda = 105 + 120$

$\lambda = 225$

مثال ۳

دستگاه پرکننده شیشه های آبلیمو طوری تنظیم شده است که فقط ۳۳۰ گرم آبلیمو را داخل هر شیشه بریزد. با وجود این میزان آبلیمویی که وارد هر شیشه می شود دارای توزیع نرمال با میانگین ۳۳۰ گرم و واریانس ۲۵ است.
احتمال اینکه؟
الف) شیشه ای بین ۳۲۴/۵ تا ۳۲۸ گرم آبلیمو داشته باشد؟
ب) شیشه ای بیش از ۳۳۵ گرم آبلیمو داشته باشد؟
ج) چنانچه میزان آبلیموی ۷۰ شیشه را وزن کنیم انتظار می رود چند شیشه بیش از ۳۳۵ گرم آبلیمو داشته باشد. ؟

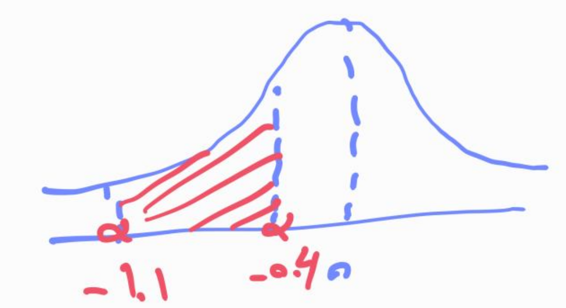
حل الف

$X \sim N(330, 25)$

$$P(324.5 < X < 328) = P\left(\frac{324.5-330}{5} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{328-330}{5}\right)$$

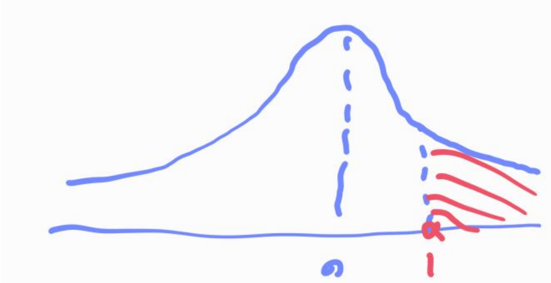
$$= P(-1.1 < Z < -0.4) = P(Z < -0.4) - P(Z < -1.1)$$

$$= 0.3446 - 0.1357 = 0.2089$$



حل ب

$$P(X>335) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{335-330}{5}\right) = P(Z>1) = P(Z<-1) = 0.1587$$



حل ج

$$Y \sim bin(0.1587, 70)$$

$$E(Y) = np = 70 \times 0.1587 = 11.109 \simeq 11$$

تجربه نشان داده که توزیع نمرات دانشجویان در یک درس دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۴ و انحراف معیار ۲ است. یک دانشجو به تصادف انتخاب می‌شود. چند درصد دانشجویان نمراتشان بیشتر از ۱۸ است ؟

ب) چند درصد دانشجویان نمراتشان بین ۱۴,۵ تا ۱۵ است؟

ج) چند درصد دانشجویان نمراتشان کمتر از ۱۳,۲۵ است؟

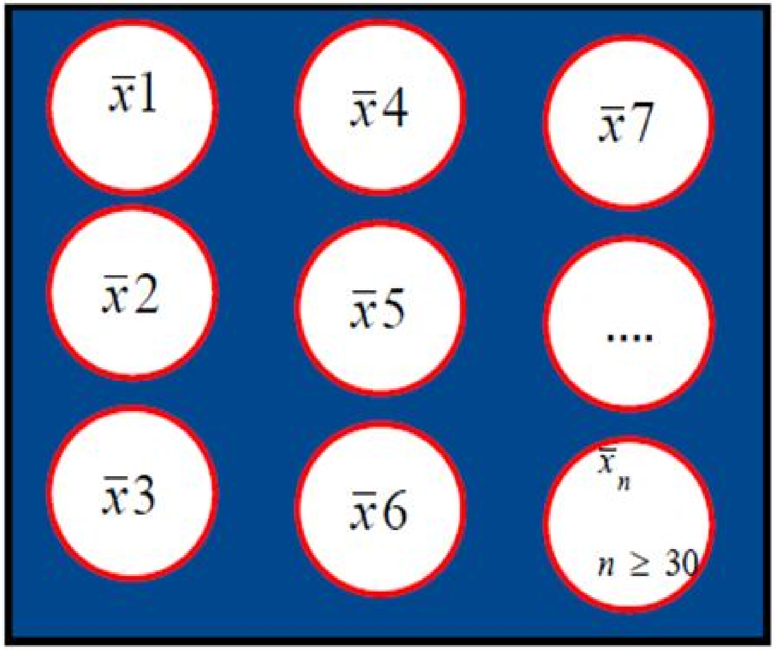
توزیع های نمونه ای
Sampling Distributions

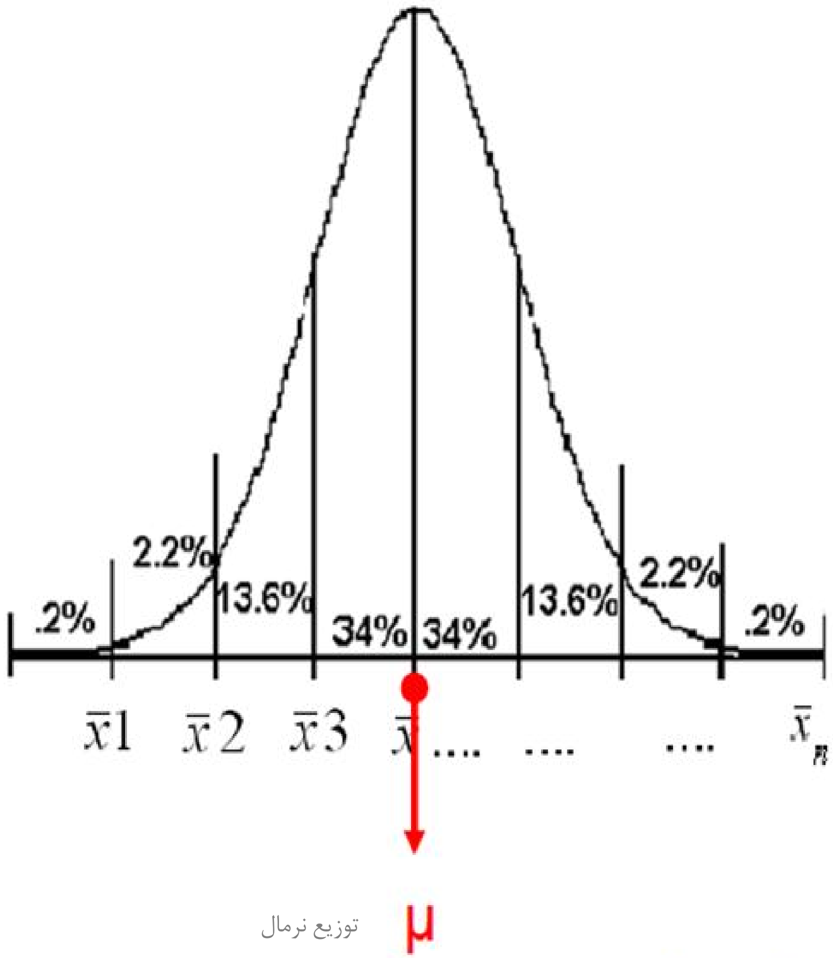
- به توزیع احتمال متغیر های تصادفی حاصل از نمونه، توزیع های نمونه ای گفته می شود.

- مثلا میانگین نمونه یک متغیر تصادفی بوده و توزیع احتمال آن طبق قضیه حد مرکزی، نرمال است.

قضیه حد مرکزی

N,μ,σ





$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

قضیه حد مرکزی

- اگر از جامعه ای با میانگین μ و انحراف معیار σ نمونه های تصادفی n تایی انتخاب کنیم، توزیع میانگین این نمونه ها دارای ویژگی های زیر است:
- ۱- میانگین این توزیع نمونه ای، یعنی میانگین این میانگین ها برابر میانگین جامعه یعنی μ خواهد بود.
- ۲- انحراف معیار این توزیع نمونه ای، یعنی انحراف معیار این میانگین ها برابر خواهد بود با $\sigma/\sqrt{n}$. این انحراف معیار را خطای معیار (Standard Error) نامیده و با نماد های زیر نشان داده می شود.

$$\sigma_{\overline{X}}, SD_{\overline{X}}, SE_{\overline{X}}, SEM$$

۳- اگر توزیع جامعه نرمال باشد، توزیع نمونه ای میانگین هم نرمال است. و مهمتر آنکه اگرتعداد نمونه به حد کافی بزرگ باشد ($n>30$)، بدون توجه به توزیع جامعه، توزیع نمونه ای میانگین نرمال خواهد بود.

کاربردهای توزیع میانگین نمونه

- قبلا دیدیم برای تبدیل X به Z از رابطه زیر استفاده می شد:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

- در اینجا نیز رابطه تبدیل $\overline{X}$ به Z به صورت زیر است:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

مثال ۴

فرض کنید که کارمزد ساعتی نوع معینی از خدمات بیمارستانی تقریبا به طور نرمال با میانگین ۴۵۰۰ و انحراف معیار ۵۰۰ تومان توزیع شده باشد. اگر نمونه ای تصادفی ۱۶ نفره انتخاب شود احتمال آنکه میانگین دستمزد ساعتی نمونه:

الف)کمتر از ۴۲۰۰ تومان باشد.

ب) بزرگتر از ۴۶۰۰ تومان باشد.

ج) بین ۴۳۰۰ تا ۴۷۵۰ تومان باشد.

حل الف

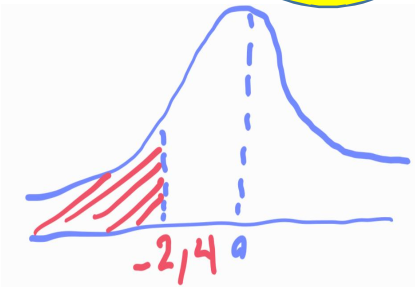
$X \sim N(4500, 500^2)$

$n=16$

$P(\bar{X} < 4200)$

$= P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{4200-4500}{500/\sqrt{16}}\right)$

$= P(Z<-2.4) = 0.0082$



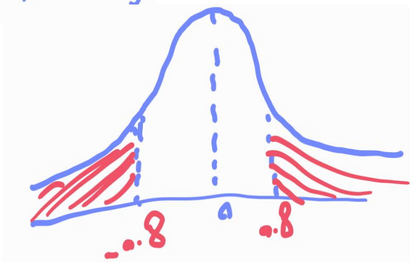
حل ب

$P(\bar{X} > 4600)$

$= P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{4600-4500}{500/\sqrt{16}}\right)$

$= P(Z>0.8) = P(Z<-0.8)$

$= 0.2112$



حل
ج

$$P(4300 < \bar{X} < 4750)$$

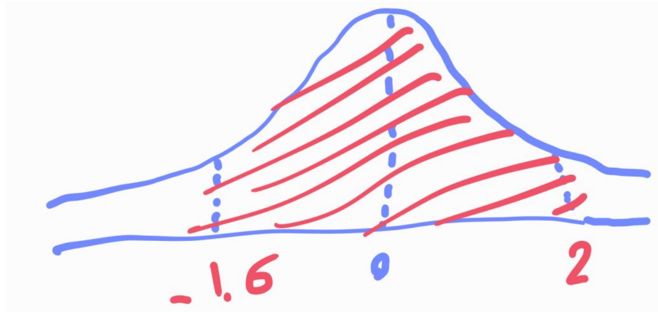
$$= P\left(\frac{4300 - 4500}{500/\sqrt{16}} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{4750 - 4500}{500/\sqrt{16}}\right)$$

$$= P(-1.6 < Z < 2)$$

$$= P(Z < 2) - P(Z < -1.6)$$

$$= 0.9772 - 0.548$$

$$= 0.9224$$



مثال ۵ زمان لازم برای انجام یک کار مونتاژ به‌وسیله یک کارگر دارای میانگین ۵۰ دقیقه و انحراف معیار ۸ دقیقه است. برای بررسی پیشرفت کارگران، کارفرمای آنها قصد دارد زمان انجام کار مونتاژ به‌وسیله ۶۰ کارگر را در یک روز به خصوص ثبت کند. احتمال اینکه میانگین نمونه بیشتر از ۵۲ دقیقه باشد چقدر است؟

$X \sim N(50, 64)$

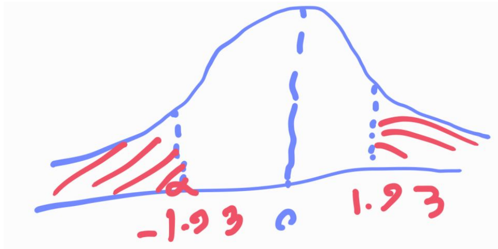
$n = 60$

$P(\bar{x} > 52)$

$= P\left(\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{52 - 50}{8/\sqrt{60}}\right)$

$= P(Z > 1.93)$

$= P(Z < -1.93) = 0.0268$



توزیع نسبت نمونه

اگر متغیر مورد پژوهش از نوع کیفی باشد به جای میانگین با نسبت سر و کار خواهیم داشت.

مثلا اگر افراد جامعه از نظر وضعیت سلامتی در یکی از دو حالت سالم یا بیمار باشند، نسبت بیماران یا نسبت افراد سالم بررسی می شود.

- ثابت می شود در یک نمونه تصادفی، ṕ دارای توزیع نرمال با میانگین p و واریانس p(1-p)/n است.

- بنا بر این ṕ یک متغیر تصادفی نرمال است که برای محاسبه احتمالات آن به صورت زیر به نرمال استاندارد تبدیل می شود:

$$Z = \frac{p' - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

مثال ۶

گزارشها نشان می دهد که ۱۰ درصد تصمیم گیرندگان اطلاعات تولیدی را به طور مستقیم از فروشندگان دریافت می کنند.
اگر این درصد درست باشد، احتمال اینکه در یک نمونه ۲۰۰ تایی از تصمیم گیرندگان
الف) بیش از ۱۳ درصد، اطلاعات تولیدی را به طور مستقیم از فروشندگان دریافت کنند چقدر است؟
ب) بیش از ۸ درصد و کمتر از ۲۵ درصد اطلاعات تولیدی را به طور مستقیم از فروشندگان دریافت کنند چقدر است؟

حل
الف

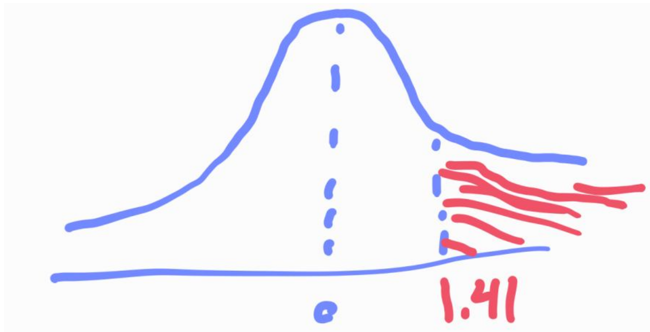
$p = 0.1 \qquad n = 200$

$$P(p' > 0.13) = P\left(\frac{p'-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} > \frac{0.13-0.1}{\sqrt{\frac{(0.1)(0.9)}{200}}}\right)$$

$$= P(Z > 1.41)$$

$$= P(Z < -1.41)$$

$$= 0.0793$$



حل ب

$$P(0.08 < p' < 0.15)$$

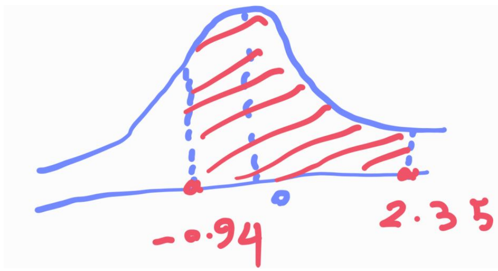
$$= P\left(\frac{0.08 - 0.1}{\sqrt{\frac{(0.1)(0.9)}{200}}} < \frac{p' - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} < \frac{0.15 - 0.1}{\sqrt{\frac{(0.1)(0.9)}{200}}}\right)$$

$$= P(-0.94 < Z < 2.35)$$

$$= P(Z < 2.35) - P(Z < -0.94)$$

$$= 0.99.6 - 0.1736$$

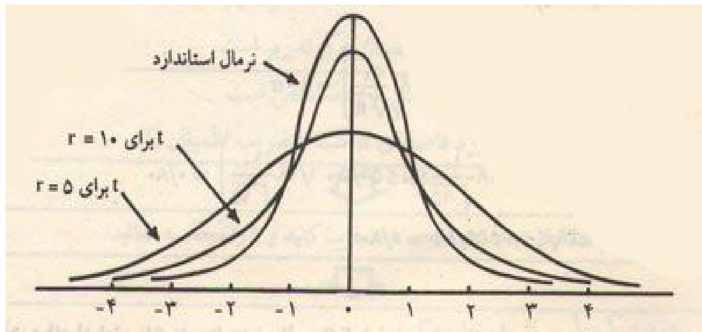
$$= 0.81$$



توزیع t

توزیع t نیز مانند توزیع نرمال قرینه است ولی دارای پراکندگی بیشتری نسبت به توزیع نرمال است. و برای مقادیر مختلف حجم نمونه (n) میزان پراکندگی توزیع t تغییر می کند و با افزایش حجم نمونه این پراکندگی کمتر شده و توزیع t با توزیع Z برابر می شود. بنابراین شکل این توزیع به حجم نمونه بستگی دارد که انرا با r نشان داده و درجه آزادی می نامیم.

در شکل زیر سطح زیر منحنی در دنباله راست توزیع t، با توجه به پارامتر درجه آزادی ثبت شده است.



نقاط درصد توزیعهای t

r	.25	.10	.05	.025	.01	.005
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

برای استفاده از جدول t احتیاج به دو عدد سطح منحنی در دنباله سمت راست توزیع و درجه آزادی توزیع tداریم

ما حرف $t_{a,r}$را به مفهوم مقدار t با سطح زیر منحنی a و درجه آزادی rبه کار می بریم.

مثال: اگر a=0.025و r=15باشد مقدار tرا به دست آورید.

برای پیدا کردن عدد t، کافی است که از سطر اول جدول، عدد ۰،۰۲۵ و از ستون اول جدول درجه آزادی ۱۵ را پیدا کنیم محل برخورد سطر و ستون عدد ۲،۱۳۱ را ارائه می کند.

$t_{0.025,15}=2.131$

نکته:

اگر جامعه مورد بررسی نرمال و انحراف معیار جامعه معلوم نباشد و نمونه تصادفی به حجم n از جامعه اختیار کنیم ان گاه آماره

$$T = \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n/\sqrt{n}},$$

دارای توزیع t با n-1 درجه آزادی است.

از توجه شما
سپاس گزارم